Corrigé de l'examen de mathématiques

Exercice 1

1. **a**. (d) admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1;-1;-1)$; (Δ) admet pour vecteur directeur $\vec{v}(2;-1;3)$
$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz' = 2 + 1 - 3 = 0$. Alors (d) et (Δ) sont orthogonales.

b. Pour tout point $M(x\,;y\,;z)$ de (d) , on a : $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où k est un réel et $\overrightarrow{OM} = k\vec{u} + \overrightarrow{OA}$

D'où une représentation paramétrique de (d): $\begin{cases} x = k \\ y = -k + 4 \\ z = -k + 1 \end{cases}$ où k est un réel.

2. (P) passe par le point A et perpendiculaire à la droite (Δ) donc $\vec{v}$ est un vecteur normal de (P).

a. D'où pour tout point $M(x\,;y\,;z)$ de (P) , on a : $\overrightarrow{AM}.\vec{v} = 0$; et $2x - (y - 4) + 3(z - 1) = 0$.
D'où (P) a pour équation : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

b. les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan(P)vérifient le système :
$\begin{cases} \begin{cases} x = 2m + 7 \\ y = -m - 1 \\ z = 3m + 4 \end{cases} \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ et on aura : $2(2m + 7) - (-m - 1) + 3(3m + 4) + 1 = 0$ cette équation est vérifiée pour $m = -2$. D'où le point $H\ (3; 1; -2)$.

c. Première méthode (d) est incluse dans (P) si tout point $M\left(k\,;-k + 4\,;-k + 1\right)$ de (d) appartient à (P). or $2k + k - 4 + 3(-k + 1) + 1 = 0$ est vérifiée pour tout réel k . D'où
(d) est incluse dans (P).

Deuxième méthode

La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P) par hypothèse, et (d) est orthogonale à (Δ) déjà démontré, alors la droite (d) est parallèle au plan (P) ou incluse dans (P) comme déjà le point A appartient à (d) et à (P) donc (d) est incluse dans(P).

d. Vérifions si $H\ (3; 1; -2)$ appartient à (d), le système $\begin{cases} 3 = k \\ 1 = -k + 4 \\ -2 = -k + 1 \end{cases}$ admet une solution unique $k = 3$ alors H appartient à (d) et par suite il est commun aux deux droites
Donc (d) et (Δ) sont sécantes en H.

3. **a.** (P) et (P_1) sont sécants s'ils ne sont parallèles. (P)a pour vecteur normal $\vec{v}(2; -1; 3)$ et (P_1) a pour vecteur normal $\vec{n}(1\,;0\,;1)$. Les coordonnées de $\vec{n}$ et de $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles : $\frac{1}{2} \neq \frac{0}{-1}$ donc leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires et par suite (P) et (P_1) sont sécants.

b. Les coordonnées de tout point de (d_1) vérifient le système $\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0. \end{cases}$

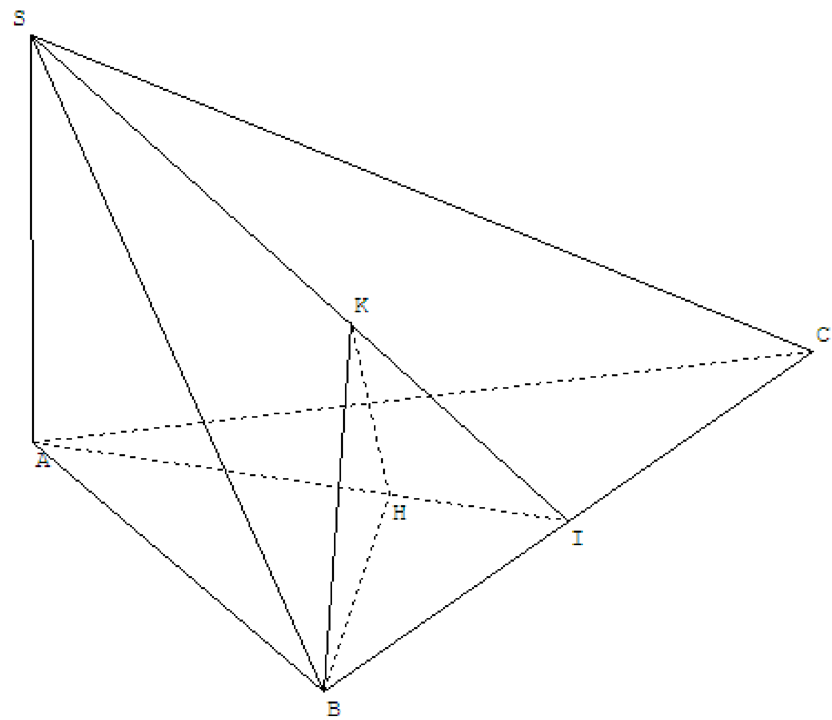
on pose $y = t$ et on calcule x et z , en fonction de t.(on pourra choisir x ou z comme paramètre)

Alors le système $\begin{cases} 2x + 3z = t - 1 \\ x + z = -1 \end{cases}$ devient $\begin{cases} x = -t - 2 \\ y = t + 0 \\ z = t + 1 \end{cases}$ ce qui représente un système

d'équations paramétriques de la droite (d_1).

Exercice 2

1.



2. ABC est un triangle équilatéral.$[AI]$ médiane relative au côté $[BC]$; donc c'est une hauteur et par suite (BC) est perpendiculaire à (AI).

(SA) est perpendiculaire au plan (ABC) alors (SA) est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier à (BC) donc :

(BC) est perpendiculaire au plan (SAI) étant orthogonale aux deux droites sécantes (AI) et (SA).

Tout plan contenant (BC) sera perpendiculaire au plan(SAI), en particulier (SBC).

Donc les plans (SBC) et (SAI) sont perpendiculaires.

3. **a.** La droite (BC) est perpendiculaire au plan (SAI), déjà démontré, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à (SI).
Dans le triangle SBC, $[SI]$ segment hauteur relatif à $[BC]$, K orthocentre du triangle , donc le point K appartient à $[SI]$. Et **S, I et K sont alignés.**

b. (SA) est perpendiculaire au plan (ABC) alors (SA) est orthogonale à (BH).

H est le centre de gravité du triangle équilatéral ABC donc il est aussi orthocentre de ABC.

D'où (BH) est perpendiculaire à (AC) alors (BH) est perpendiculaire au plan (SAC) étant orthogonale aux deux droites sécantes (AC) et (SA). donc (BH) est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier à (SC) .

K est l'orthocentre du triangle SBC donc (SC)est perpendiculaire à (BK).

(SC) étant orthogonale aux deux droites sécantes (BH) et (BK), est perpendiculaire au plan (BHK) donc à (HK). Ainsi **(SC) et (HK) sont orthogonales.**

Exercice 3

1. ABC est un triangle alors $A + B + C = \pi$; sin $(B + C) = sin(\pi - A) = \sin A$.

$$\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{cosB\ sinC + cosCsinB}{\sin B\ sinC} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\ sinC} = \frac{sinA}{\sin B\ sinC}$$

2. $$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin x} = \frac{2cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$. sachant que $sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos(\alpha)$

3. a. $cos(a)\ cos(3a)$

$$= \frac{\cos(a+3a)+\cos(a-3a)}{2}$$

$$= \frac{\cos(4a)+\cos(-2a)}{2}$$ sachant que $cos\ (-x) = cos\ (x)$

$$= \frac{2\cos^2(2a)-1+1-2sin^2(a)}{2}$$

$$= \cos^2(2a) - sin^2(a).$$

b. $sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

c. $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\ cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\ cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Exercice 4

1. $g(x)= 2x^3 - 3x^2 - 1$

a. g fonction polynôme définie et dérivable sur R. $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

$$\lim_{-\infty} g(x) = \lim_{-\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} 2x^3 = +\infty$$

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
g	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$

- Sur $[1{,}67; 1{,}68]$ g est dérivable et strictement croissante.
- $g(1{,}67) \times g(1{,}68) = -0{,}05 \times 0{,}02 = -0.001 < 0$ donc $g(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 1,67 et 1,68.
- Sur $]-\infty; 1{,}67]$ g est dérivable et non monotone et $g(x) < 0$
- Sur $[1{,}68; +\infty[$ g est dérivable et strictement croissante donc $g(x) > g(1{,}68) > 0$
  Alors sur ces deux derniers intervalles, $g(x) = 0$ n'admet pas de solution et on déduit finalement que α est unique sur IR.

b.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de g		$-$	0	$+$	

2. La droite d'équation $y = 12x - 21$ est une tangente à $(\mathbf{G})$ s'il existe un réel x_0 tel que $\begin{cases} g'(x_0) = 12 \\ \textit{le point } (x_0\ ;\ g(x_0))\ \textit{appartient à cette droite.} \end{cases}$

D'où :

$6x^2 - 6x = 12$ ce qui implique $6x^2 - 6x - 12 = 0$. cette équation est du second degré avec $a - b + c = 0$ donc elle admet pour solutions -1 et $-\frac{c}{a} = 2$

$g(-1) = -6$, le point $(-1; -6)$ n'appartient pas à la droite d'équation $y = 12x - 21$

et $g(2) = 3$ le point $(2; 3)$ appartient à la droite d'équation $y = 12x - 21$.

Donc la droite d'équation $y = 12x - 21$ est tangente à G uniquement au point $(2; 3)$.

3. a. $(1+x)(1-x+x^2) = 1 - x + x^2 + x - x^2 + x^3 = 1 + x^3$

b. $1 + x^3 = 0$ équivaut à $1 + x = 0$ ou $1 - x + x^2 = 0$

le trinôme $x^2 - x + 1$ admet un discriminant négatif égal à -3 donc il n'admet pas de solution et par suite $x = -1$ est la seule solution de l'équation $1 + x^3 = 0$.

4. $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$

a. $\lim_{-1}(1-x) = 2$ *et* $\lim_{-1^+}(1+x^3) = 0$ et $(1+x^3) > 0$ donc $\lim_{-1^+} \frac{1-x}{1+x^3} = +\infty$

d'où $\lim_{-1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{+\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim_{+\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{+\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{+\infty} f(x) = 0$

b. $\lim_{-1^+} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C).

$\lim_{+\infty} f(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C)

au voisinage de $+\infty$.

5. a. f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ fonction rationnelle. $f'(x) = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

Le signe de f ' est celui de g car le dénominateur est strictement positif.

Sur $]-1\,;\alpha[$ $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante.

Sur $]\alpha;+\infty[$ $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante.

b. D'où le tableau de variation de f.

x	-1		α		$+\infty$
Signe de f '		$-$	0	$+$	
Variation de f		$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow 0$	

Avec $f(\alpha) \approx -0.12$

Exercice 5

$u_0 = 1\ et\ \ u_{n+1} = 3 + \frac{1}{4}\,u_n.$ ***et*** $v_n = 3 - \frac{3}{4}u_n$. Donc $\boxed{u_n = \frac{4}{3}(3 - v_n)\ .}$

1. $v_{n+1} = 3 - \frac{3}{4}u_{n+1} = 3 - \frac{3}{4}\left(3 + \frac{1}{4}\,u_n\right) = 3 - \frac{9}{4} - \frac{3}{16}\,u_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{16} \times \frac{4}{3}(3 - v_n) = \frac{1}{4}v_n$ pour tout entier naturel n.

   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q\ = \frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = 3 - \frac{3}{4}u_0 = \frac{9}{4}$

2. $v_n = v_0 \times q^n = \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ $\boxed{v_n = \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

   $u_n = \frac{4}{3}\left(3 - \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 4 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $\boxed{u_n =\ \ 4 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

3. $S_n = u_0 + u_1\ + \cdots +\ u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^0 + 4 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^1 + 4 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots 4 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n.$

   $= (4 + 4 + 4 + \cdots 4) - 3\left(\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

   $= 4(n+1) - 3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right) = 4n + 4 - 4\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = 4n + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ $\boxed{S_n = 4n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

   S_n étant la somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et

   de $n+1$ termes d'une suite constante.

Exercice 6

1. Les boules sont indiscernables donc les issues sont équiprobables et $p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega}$

   Une partie consiste à tirer au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. Alors une issue est un couple d'éléments distincts ou non.

   Pour tirer la première boule on a 10 choix et pour tirer la deuxième on a aussi dix choix

   donc il y a 100 issues équiprobables et $card\ \Omega = 100$

Y est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Alors les valeurs possibles de Y sont : $-1\,;-9\ et\ 5$

$''Y=-1''\,contient\ les\ issues\ du\ type\ (N,N)\ leur\ nombre\ est\ 7\times 7=49$

- $p(Y=-1)=\frac{card(Y=-1)}{card\ \Omega}=\frac{49}{100}=0{,}49$

$''Y=-9''\,contient\ les\ issues\ du\ type\ (B,B)\ leur\ nombre\ est\ 3\times 3=9$

- $p(Y=-9)=\frac{card(Y=-9)}{card\ \Omega}=\frac{9}{100}=0{,}09$

On peut écrire aussi : L'événement $''Y=5''$ contient les issues du type $(B,N)\ et\ (N,B)$

- $p(Y=5)=p(B,N)+p(N,B)=\frac{3\times7}{100}+\frac{7\times3}{100}=0{,}42$

b. On résume dans ce tableau la loi de probabilité de Y.

y_I	-9	-1	5	total
$p(Y=y_i)$	0,09	0,49	0,42	1

2. Chaque partie est une épreuve de Bernoulli à deux issues:

- Succès : le joueur gagne la partie et $p(S)=0{,}42$
- Échec : le joueur ne gagne pas la partie et $p(\overline{S})=0{,}58$

a. Le joueur joue 10 parties identiques et indépendantes donc on est dans un schéma de Bernoulli d'ordre 10.
X est la variable aléatoire qui indique le nombre de parties gagnées par le joueur donc le nombre de succès, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=10\ et\ p=0{,}42$.
$p(X=k)=\binom{10}{k}(0{,}42)^k(0{,}58)^{10-k}$, Pour tout entier naturel $k\leq 10$

b. $p(X=0)=\binom{10}{0}(0{,}42)^0(0{,}58)^{10}=0{,}004$.
$p(X\geq 3)=1-p(X\leq 2)=1-\big(p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)\big)=1-0{,}137=0{,}863$.

c. $p(X\geq 1)\ =1-p(X=0)=1-0{,}004=0{,}996$.

d. X indique le nombre de parties gagnées par le joueur donc le nombre de parties perdues est alors $10-X$. Leur nombre moyen est l'espérance $E(10-X)$, sachant que $E(X)=np=10\times 0{,}42=4{,}2\quad et\ E(10-X)=10-E(X)=10-4{,}2=5{,}8$.
En moyenne le joueur perd 5,8 parties lors des 10 parties jouées.

3. On est dans un schéma de Bernoulli d'ordre n. et X suit une loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}42$ et $p(X=k)=\binom{n}{k}(0{,}42)^k(0{,}58)^{n-k}$.

a. $p_n=\ p(X\geq 1)\ =1-p(X=0)=1-(0{,}58)^n$

b. $p_n \geq 0{,}99 \iff 1-(0{,}58)^n \geq 0{,}99 \iff (0{,}58)^n \leq 0{,}01$

la suite $(0{,}58)^n$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}58$ comprise entre 0 et 1 donc elle est strictement décroissante.

$(0{,}58)^8 = 0{,}012 > 0{,}01$ et $(0{,}58)^9 = 0{,}007 < 0{,}01$

Donc pour $n \geq 9$ $(0{,}58)^n \leq (0{,}58)^9$ et

Le joueur doit jouer au moins 9 parties.