Collège notre Dame de Jamhour
Classe de seconde *Corrigé de l'examen de mathématiques*
Juin 2014

Exercice 1

$f(x) = -2x^2 + 12x - 16.$

1. Les coordonnées du sommet. $x_s = \frac{-b}{2a} = 3$ et $y_s = f(3) = 2$. D'où : $S(3,2)$.

La forme canonique.de f : $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S = -2(x-3)^2 + 2$.

2. f est strictement croissante sur$]-\infty; 3]$ et strictement décroissante sur $[3; +\infty[$ car $a < 0$

Le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Variation de f		$\nearrow$	2	$\searrow$	

3. Comparaison des nombres $a = -2(\pi-3)^2 + 2$ et $b = -2(\pi-2)^2 + 2$.

$a = f(\pi) = -2(\pi-3)^2 + 2$ et b = $f(\pi+1) = -2(\pi-2)^2 + 2$.

Or $3 < \pi < \pi + 1$ et f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$.

Alors $f(\pi) > f(\pi+1)$ et par suite $-2(\pi-3)^2 + 2 > -2(\pi-2)^2 + 2$. Donc $a > b$.

4. l'intervalle décrit par x lorsque $g(x) \in]-6; 5]$
$-6 < x^2 - 4 \leq 5 \Leftrightarrow -2 < x^2 \leq 9 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$ D'où $x \in [-3,3]$.

5. a. $f(x) - g(x) = -3(x^2 - 4x + 4) = -3(x-2)^2 \leq 0$ pour tout réel x.

b. les positions des courbes (F) et (G).

Sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, $f(x) < g(x)$ alors (F) est strictement en dessous de (G).

Pour $x = 2$, (F) et (G) se coupent en un point unique.

Exercice 2

1. (d) et (Δ) sont sécantes.

   La droite (d) admet $\vec{u}(1;3)$ pour vecteur directeur; (Δ) admet $\vec{v}(1;-2)$ pour vecteur directeur.
   $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx' = -2 - 3 = -5 \neq 0$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et par suite
   Les droites (d) et (Δ) sont sécantes.

les coordonnées du point A intersection des droites(d) et (Δ)

les coordonnées du point A intersection des droites (d) et (Δ) sont les solutions du système :

$\begin{cases} \begin{cases} x = t+1 \\ y = 5-2t \end{cases} \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$ et on aura : $3(t+1) - (5-2t) - 3 = 0$. Cette équation est vérifiée pour $t = 1$.

D'où le point $A\,(2;3)$.

2. l'angle α de (d) et (Δ)

l'angle α de (d) et (Δ)est celui de leurs vecteurs directeurs $\vec{u}(1;3)$ et $\vec{v}(1;-2)$.

$cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{1-6}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ radians.

3. **Représentation paramétrique de la droite (d') perpendiculaire à(d) et passant par le point $B(3;6)$.**

(d') admet pour vecteur directeur un vecteur normal de (d) alors le vecteur $\vec{w}(3;-1)$ dirige (d')
Et pour tout point M de (d') , $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires. Alors il existe un réel k tel que

$\overrightarrow{BM} = k\,\vec{w}$ et $\overrightarrow{OM} = k\,\vec{w} + \overrightarrow{OB}$. D'où la représentation paramétrique de la droite (d').

$\begin{cases} x = 3k+3 \\ y = -k+6 \end{cases}$ où k *est* un réel.

4. **La distance du point $B(3;6)$ à la droite (Δ).**

$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 5-2t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = x-1 \\ t = \frac{5-y}{2} \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \frac{5-y}{2}$ d'où l'équation cartésienne de la droite (Δ).:

$2x + y - 7 = 0$ *et* $d = \frac{|2x_B + y_B - 7|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$.

Exercice 3

1.

	1	2	3	4
1	(1,1) S=2, P=1	(1,2) S=3 , P=2	(1,3) S=4, P=3	(1,4) S=5, P=4
2	(2,1) S=3, P=2	(2,2) S=4, P=4	(2,3) S=5, P=6	(2,4) S=6, P=8
3	(3,1) S=4, P=3	(3,2) S=5, P=6	(3,3) S=6, P=9	(3,4) S=7, P=12
4	(4,1) S=5, P=4	(4,2) S=6, P=8	(4,3) S=7, P=12	(4,4) S=8, P=16

2. On tire au hasard alors les événements élémentaires sont équiprobables et si E est un événement alors $p(E) = \frac{card\ E}{card\ \Omega}$.

On tire 2 boules successivement avec remise alors une issue est un couple.

On a 4 choix pour tirer la première boule et on a aussi 4choix pour tirer la deuxième boule donc au total on a $4 \times 4 = 16$ choix pour tirer les deux boules. D'ou $card\ \Omega = 16$

$A = \{(1,3); (3,1); (2,2)\}$.D'où $card\ A = 3$ et $p(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{3}{16}$

3.

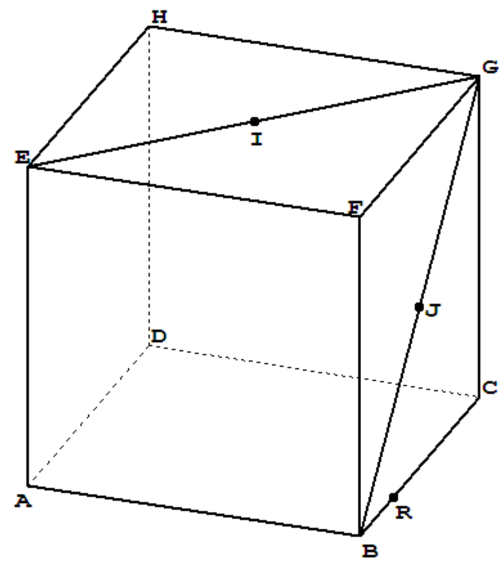
- $B = \{(1,4); (4,1); (2,2)\}$ D'où $p(B) = \frac{card\ B}{card\ \Omega} = \frac{3}{16}$
- $A \cap B = \{(2,2)\}$. D'où $p(A \cap B) = \frac{card\ A\cap B}{card\ \Omega} = \frac{1}{16}$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$
- $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$.

4. $p(A \cap B) = \frac{1}{16} \neq 0$ alors $A \cap B \neq \phi$ par suite A et B ne sont pas incompatibles.

Donc à plus forte raison A et B ne sont pas contraires car ils doivent être incompatibles et leur réunion est l'univers Ω.

Exercice 4

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$.



1. Les droites (CG) et (AI) sont sécantes en un point noté M.

   Les arêtes AE et CG sont parallèles et égaux donc forment un parallélogramme ; leurs supports déterminent le plan (AEGC).
   Dans ce plan, les droites (AI) et CG) ne sont pas parallèles (par le point A on ne peut mener qu'une seule parallèle à (CG) donc sécantes. On note M ce point commun.

2. la droite (Δ) intersection des plans (BCG) et (ABI).
   B est un point commun donc les plans (BCG) et (ABI)sont sécants.
   (CG) et (AI) sont sécantes en M. d'où M appartenant à (CG) donc au plan (BCG) et M appartient à (AI) donc au plan (ABI).et M point commun aussi.
   Alors (Δ) n'est autre que la droite (BM).

3. la droite (Δ') intersection des plans (BCE) et (RIJ) est parallèle au plan(ABF).

   Dans le triangle GBE, (IJ) est parallèle à (BE) droite des milieux.
   (IJ) est contenue dans le plan (RIJ).
   (BE) est contenue dans le plan (BCE).
   Le point R appartient à (BC) donc au plan (EBC) et appartient au plan (RIJ).
   Alors ces plans sont sécants et d'après le théorème du toit, leur droite d'intersection (Δ') est parallèle à (BE) et à (IJ).

   La droite (Δ') est parallèle à (BE) donc à tout plan contenant (BE) donc au plan (ABF).

4. Déterminer le point T intersection de la droite (EJ) et du plan (ABC).

   Le point J est le milieu de [BG] donc de [FC] car BCGF est un carré.

   Les arêtes FE et CD sont parallèles et égaux donc forment un parallélogramme ; leurs supports déterminent le plan (EFCD). Dans ce plan, les droites (EJ) et (CD) sont sécantes car (EJ) coupe (EF)donc coupe sa parallèle (CD); soit T ce point commun. Comme la droite (CD) est contenue dans le plan (ABC) Donc T est la trace de (EJ) sur le plan (ABC).

Exercice 5

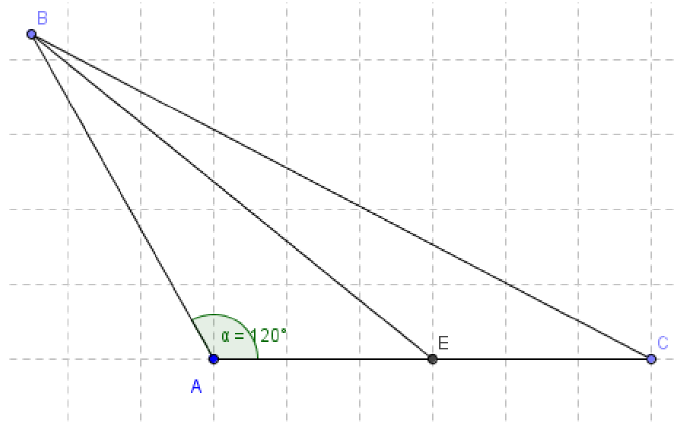
1. <u>Calcul de BE</u>

Dans le triangle ABE on applique le théorème de Pythagore généralisé :

$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2 \times AB \times AE \times \cos\widehat{BAE}$

$= 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3\frac{-1}{2} = 49$

D'où $BE = 7$



<u>Calcul de BC</u>

On applique le théorème de la médiane dans le triangle ABC :

$BA^2 + BC^2 = 2BE^2 + \frac{AC^2}{2}$ D'où $BC^2 = 2 \times 49 + 18 - 25$ et BC $=\sqrt{91}$.

2. <u>l'ensemble (Δ) des points M tel que : $MA^2 - MC^2 = -36.$</u>

$MA^2 - MC^2 = 2\,\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{AC}$ (Théorème de la médiane).alors $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{AC} = -18.$
Où H est le projeté orthogonal du point M sur (AC).

$\overrightarrow{EH}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de produit scalaire négatif alors ils sont de sens opposés, parsuite

$-EH \times AC = -18$ d'où $EH = 3$.

E est fixe, H appartient à la droite fixe (AC) et $EH = 3$ donc H est fixe.
Et le point M varie sur la perpendiculaire à (AC) passant par le point H.
L'ensemble (Δ) est la perpendiculaire à (AC) passant par le point H.

En remplaçant le point M par A on obtient: $-AC^2 = -36$. VRAI donc A appartient à (Δ).
En remplaçant le point M par C on obtient: $CA^2 = -36$. FAUX donc C n'appartient pas à (Δ).

Exercice 6 :

1. les valeurs exactes des affichages en sortie lorsque $A = 2$ sont : $n = 3$ et $B = \frac{64}{27}$ car

n	0	1	2	3
B	1	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$
A	2	2	2	2
$B < A$	oui	oui	oui	non

Algorithme donné

Variables
A, B
n entier naturel
Entrées
Saisir A
Initialisation
n prend la valeur 0
B prend la valeur 1
Traitement
Tant que $B < A$ faire
n prend la valeur $n + 1$
B prend la valeur $B \times \frac{4}{3}$
Fin tant que
Sortie
Afficher n
Afficher B

2. Programme

```
? → A ↲
0 → N ↲
1 → B ↲
While B < A ↲
N + 1 → N ↲
4/3 × B → B ↲
While End↲
"N=": N◢
"B=": B◢
```

3. Algorithme modifié

Variables
$A, B, n\ S$
Entrées
Saisir A
Initialisation
n prend la valeur 0
B prend la valeur 1
S prend la valeur 1
Traitement
Tant que $S < A$ faire
n prend la valeur $n + 1$
B prend la valeur $B \times \frac{4}{3}$
S prend la valeur $S + B$
Fin tant que
Sortie
Afficher n
Afficher S