College Notre-Dame de Jamhour **Mai 2014**
Terminale SV **Corrigé**

MATHEMATIQUES

Exercice 1

1. Les vecteurs normaux de (*P*1) et (*P*2) sont respectivement: $\vec{n}_1$(-2;1;1) et $\vec{n}_2$(1;-2;4) et leur produit scalaire est nul. Il en résulte que les plans (*P*1) et (*P*2) sont perpendiculaires.

2. La droite (*D*) est définie par le système:

$$\begin{cases} -2x+y+z-6=0 \\ x-2y+4z-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+4z-9=0 \\ -3x+6z-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z-7-2y+4z-9=0 \\ x=2z-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z-8 \\ x=2z-7 \end{cases}$$

En remplaçant *z* par *t*, on obtient la représentation paramétrique de (*D*): $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \\ z=t \end{cases}$, ($t \in \mathbb{R}$).

3.a. Les coordonnées de *A* ne vérifient pas les équations des deux plans, donc *A* n'appartient ni à (*P*1), ni à (*P*2).
b. AM^2 = (-7+2*t*+9)² + (-8+3*t*+4)² + (*t*+1)² = 4*t*² + 8*t* + 4 + 9*t*² - 24*t* + 16 + *t*² + 2*t* + 1 = 14*t*² - 14*t* + 21 = 7(2*t*²-2*t*+3).
Donc: AM^2 = 7(2*t*²-2*t*+3).
c. *f* est une fonction du second degré continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout réel *t*, *f* '(*t*) = 4*t* - 2.
Elle donc strictement croissante sur [$\frac{1}{2}$; +∞[et strictement décroissante sur]-∞ ; $\frac{1}{2}$]. Elle admet un minimum en $\frac{1}{2}$ de valeur $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$.
Comme AM^2 = 7*f*(*t*), AM^2 et donc *AM* est minimale pour $t = \frac{1}{2}$ ce qui donne $M(-6 ; -\frac{13}{2} ; \frac{1}{2})$.
$I(-6 ; -\frac{13}{2} ; \frac{1}{2})$.

4.a. Un vecteur directeur de (*D*) est $\vec{u}$(2 ; 3 ; 1) et comme (*Q*) est orthogonal à (*D*), ce vecteur est un vecteur normal de (*D*).
Une équation de (*D*) est donc de la forme: 2*x*+3*y*+*z*+d = 0.
Comme les coordonnées de *A* vérifient cette équation, on a: -18-12-1+d = 0, ce qui donne d = 31.
Une équation de (*Q*) est: 2*x*+3*y*+*z*+31 = 0

b. $\vec{A}(-3 ; \frac{5}{2} ; -\frac{3}{2})$ et *I* appartient à (*D*).
$\vec{u}$(2 ; 3 ; 1) étant un vecteur directeur de (*D*), on a: $\vec{A}.\vec{u} = -6 + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 0$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{A}$ sont donc orthogonaux, d'où *I* est le projeté orthogonal de *A* sur (*D*).

Exercice 2 :

1. $\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\cos^2 2x - 2\cos 2x\right) = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x + \frac{\cos 4x+1}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

2. Volume élémentaire $= \pi y^2 dx = \pi \sin^4 x dx$

$$V = \int_0^{\pi} dV = \pi \int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \pi\left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi} = \pi\left(\frac{3}{8}\pi - 0 + 0\right) = \frac{3}{8}\pi^2 \text{ uv.}$$

Exercice 3 :

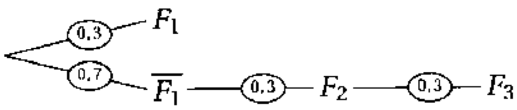
Partie A

1. **Quelle est la durée moyenne d'une vanne ?**
La variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$, donc la durée de vie moyenne est :
$\boxed{E(\lambda) = \frac{1}{\lambda} = 5000 \text{ heures}}$.

2. **Calculer** $P(T > 6000)$.
La variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$, donc
$\boxed{P(T > 6000) = e^{-6000\lambda} = e^{-1,2}}$

Partie B

1. **Arbre des probabilités.**



2. **Démontrer que** $P(E) = 0,363$.
On a :
$P(E) = P(F_1) + P\left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3\right)$
$P(E) = 0,3 + 0,7 \times 0,3 \times 0,3$
$\boxed{P(E) = 0,363 = 36,3\%}$

3. **Calculons la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche, sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures.**
On cherche donc à calculer $P_E(F_1)$ soit :
$P_E(F_1) = \frac{P(E \cap F_1)}{P(E)}$
$P_E(F_1) = \frac{P(F_1)}{P(E)} = \frac{0,3}{0,363}$
$\boxed{P_E(F_1) \approx 0,826 \text{ soit environ } 82,6\%}$.

Partie C L'industriel affirme que seulement 2% des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. **Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I, au seuil de 95 % de la variable F.**
On a $n = 400$, $p = 2\%$ alors on sait que puisque $n = 400 \geq 30$, $np = 88 \geq 5$ et $n(1-p) = 392 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F est :
$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
soit
$$I = \left[0,02 - 1,96\frac{\sqrt{0,02 \times 0,98)}}{\sqrt{400}} \; ; \; 0,02 + 1,96\frac{\sqrt{0,02 \times 0,98)}}{\sqrt{400}}\right]$$
Et donc $\boxed{I \approx [0,628\% \; ; \; 3,375\%]}$.

2. **Test.**
On choisit 400 vannes au hasard dans la production, tirage assimilé à un tirage aléatoire avec remise. Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses soit une proportion de $p = \frac{10}{400} = 2,5\%$.
On a bien $p = 2,5\% \in I \approx [0,628\% \; ; \; 3,375\%]$, donc on ne peut pas remettre en cause, au seuil de 95%, l'affirmation de l'industriel.

Partie D

La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $m = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. $\boxed{P(760 \le D \le 840) = P\left(-1 \le \frac{D-800}{40} \le 1\right) \simeq 0{,}683}$

2. $\boxed{P(D \le 880) = P\left(\frac{D-800}{40} \le 2\right) = \Phi(2) \simeq 0{,}977}$

3. L'industriel pense que s'il constitue un stock de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1% de chances d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?
Le fait d'être en rupture de stock signifie que la demande D est supérieure strictement au stock de 880, on cherche donc $P(D > 880)$ soit :
$P(D > 880) = 1 - P(\le D \le 880)$
$P(D > 880) \approx 1 - 0{,}977$
$P(D > 880) \approx 0{,}023$
$\boxed{P(D > 880) \approx 2{,}3\% > 1\%}$, donc l'industriel a tort.

Exercice 4 :

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

1. D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty \text{ (par produit) donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

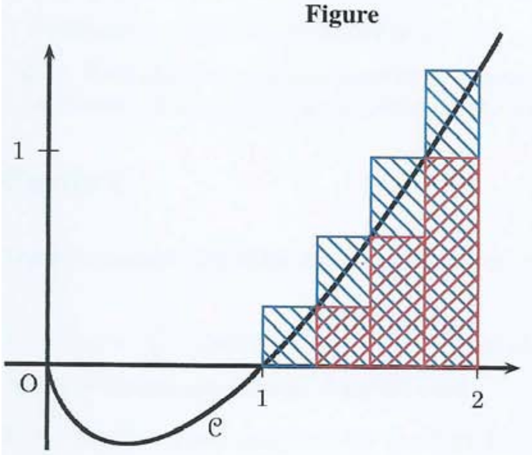
3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$: $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$

Donc :

- La fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}]$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.

Partie B

Figure



Algorithme

Variables
k et n sont des entiers naturels
U, V sont des nombres réels
Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
Afficher U
Afficher V

1. 1. a. Sur la figure ci-dessus, le nombre U représente la somme des aires des rectangles inférieurs (en rouge) ; cette somme minore l'aire sous la courbe. Le nombre V représente la somme des aires des rectangles supérieurs (en bleu) ; cette somme majore l'aire sous la courbe.

1. b. On fait tourner l'algorithme ci-dessus :

Variables	k	U	V	n
Initialisation		0	0	4
Traitement	0	0	0,069 8	4
	1	0,069 7	0,221 8	4
	2	0,221 7	0,466 7	4
	3	0,466 6	0,813 2	4
Affichage	On affiche la valeur de U : 0,466 6			
	On affiche la valeur de V : 0,813 2			

1. c. On peut donc en déduire que $0{,}466\,6 < \mathcal{A} < 0{,}813\,2$.

2. On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant V_n$.

2. a. Sachant que $U_n = \dfrac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + f\left(1+\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$ et que

$V_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + f\left(1+\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right) + f(2)\right]$,

on peut dire que $V_n - U_n = \dfrac{1}{n}\left(f(2) - f(1)\right) = \dfrac{2\ln(2) - 0}{n} = \dfrac{2\ln(2)}{n}$.

$V_n - U_n < 0,1 \iff \dfrac{2\ln(2)}{n} < 0,1 \iff 2\ln(2) < 0,1\,n \iff \dfrac{2\ln(2)}{0,1} < n$

Or $\dfrac{2\ln(2)}{0,1} \approx 13,86$ donc le plus petit entier n tel que $V_n - U_n$ soit inférieur à 0,1 est 14.

Vérification : $V_{13} - U_{13} \approx 0,107 > 0,1$ et $V_{14} - U_{14} \approx 0,099 < 0,1$.

2. b. Pour obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$ dans l'algorithme, il suffit d'entrer 14 comme valeur de n ; autrement dit, au lieu de « n prend la valeur 4 », on entrera « n prend la valeur 14 ».

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

1. $F'(x) = \dfrac{2x}{2} \times \ln(x) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{4} = x\ln(x) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2} = x\ln(x) = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. La fonction f est croissante sur $[1\,;2]$ et $f(1) = 0$ donc la fonction f est positive sur $[1\,;2]$; on peut donc dire que $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = F(2) - F(1) = (2\ln(2) - 1) - \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \dfrac{3}{4}$