Classes de 3ème **Année 2016-2017**
Examen de mathématiques
CORRIGE

<u>Exercice 1</u>
Partie A :
1. b 2. a 3. c 4. c 5. b

<u>Partie B</u>
On donne

- $\boldsymbol{A = 3\sqrt{27} - 4\sqrt{48} + 2\sqrt{75}}$
- $\boldsymbol{B = \frac{6}{3-\sqrt{3}} + 1}$

a) Ecrire A sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier naturel.

$A = 3\sqrt{27} - 4\sqrt{48} + 2\sqrt{75}$
$A = 3\sqrt{9}\sqrt{3} - 4\sqrt{16}\sqrt{3} + 2\sqrt{25}\sqrt{3}$
$A = 9\sqrt{3} - 16\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$
$A = 3\sqrt{3}$, avec 3 entier naturel.

b) Donner l'écriture simplifiée sans radical au dénominateur de B.

$$B = \frac{6}{3-\sqrt{3}} + 1$$
$$B = \frac{6}{3-\sqrt{3}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + 1$$
$$B = \frac{18+6\sqrt{3}}{9-3} + 1$$
$$B = \frac{18+6\sqrt{3}+6}{6}$$
$$B = \frac{24+6\sqrt{3}}{6}$$
$$B = 4 + \sqrt{3}$$

c) Comparer A et B en justifiant.

$A - B = 3\sqrt{3} - \left(4 + \sqrt{3}\right)$
$A - B = 3\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3}$
$A - B = 2\sqrt{3} - 4$
$A - B = \sqrt{12} - \sqrt{16}$,
avec $\sqrt{12} < \sqrt{16}$ donc $A - B < 0$ donc $A < B$.

Partie C

$$\boldsymbol{C = \frac{2,4 \times 10^{-5} \times 27 \times (10^3)^{-3}}{3,6 \times 15 \times 10^9}} \qquad \boldsymbol{D = \frac{10}{2+\sqrt{5}} \div \frac{2-\sqrt{5}}{5}} \qquad \boldsymbol{E = \sqrt{\frac{0,25 \times 1,44}{1,69 \times 0,0049}}}$$

a) Donner l'écriture scientifique de C.

$$C = \frac{2{,}4 \times 10^{-5} \times 27 \times (10^3)^{-3}}{3{,}6 \times 15 \times 10^9}$$
$$C = \frac{24 \times 10^{-6} \times 27 \times 10^{-9}}{36 \times 10^8 \times 15}$$
$$C = \frac{12 \times 2 \times 9 \times 3 \times 10^{-15}}{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 10^8}$$
$$C = \frac{6}{5} \times 10^{-23}$$
$$C = 1{,}2 \times 10^{-23}$$

b) Montrer que D est un entier relatif.

$$D = \frac{10}{2+\sqrt{5}} \div \frac{2-\sqrt{5}}{5}$$
$$D = \frac{10}{2+\sqrt{5}} \times \frac{5}{2-\sqrt{5}}$$
$$D = \frac{50}{4-5}$$
$$D = \frac{50}{-1}$$

$D = -50$, avec -50 entier relatif.

c) Ecrire E sous forme d'une fraction irréductible.

$$E = \sqrt{\frac{0{,}25 \times 1{,}44}{1{,}69 \times 0{,}0049}}$$
$$E = \sqrt{\frac{25 \times 10^{-2} \times 144 \times 10^{-2}}{169 \times 10^{-2} \times 49 \times 10^{-4}}}$$
$$E = \sqrt{\frac{25 \times 144}{169 \times 49}} \times \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-6}}}$$
$$E = \frac{5 \times 12}{13 \times 7} \times \sqrt{10^2}$$
$$E = \frac{5 \times 12 \times 10}{13 \times 7}$$
$$E = \frac{600}{91}$$

<u>Exercice 2</u>

Dans ce qui suit, on a :

- $\boldsymbol{P(x) = (5x-3)^2 - x^2 + 2x - 1}$
- $\boldsymbol{Q(x) = (2x-1)^2 - 4(x+3)^2}$
- $\boldsymbol{T(x) = (2x-1)(3-2x) - 2(3x+1)(1-2x)}$
- $\boldsymbol{N(x) = -5x - (x-1)(x-4)}$

1) Factoriser $\boldsymbol{P(x)}$ et $\boldsymbol{T(x)}$.

$P(x) = (5x-3)^2 - x^2 + 2x - 1$
$P(x) = (5x-3)^2 - (x-1)^2$
$P(x) = [(5x-3) - (x-1)][(5x-3) + (x-1)]$
$P(x) = (4x-2)(6x-4)$
$P(x) = 4\,(2x-1)(3x-2)$

$T(x) = (2x-1)(3-2x) - 2(3x+1)(1-2x)$
$T(x) = (2x-1)(3-2x) + 2(3x+1)(2x-1)$
$T(x) = (2x-1)[(3-2x) + 2(3x+1)]$
$T(x) = (2x-1)(3-2x+6x+2)$
$T(x) = (2x-1)(5+4x)$

2) Parmi les polynômes ci-dessus, retrouver en justifiant :

a) Un polynôme de degré 1

$Q(x) = (2x-1)^2 - 4(x+3)^2$
$Q(x) = 4x^2 + 1 - 4x - 4(x^2 + 9 + 6x)$
$Q(x) = 4x^2 + 1 - 4x - 4x^2 - 36 - 24x$
$Q(x) = -28x - 35$, donc $Q(x)$.

b) Un polynôme admettant deux racines décimales

$T(x) = (2x-1)(5+4x)$
$T(x) = 0 \Rightarrow (2x-1)(5+4x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \; OU \; 5 + 4x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \; OU \; x = -\dfrac{5}{4}$
avec $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{5}{4}$ qui sont des valeurs décimales.

c) Un polynôme n'admettant pas de racine.

$N(x) = -5x - (x-1)(x-4)$
$N(x) = -5x - (x^2 - 4x - x + 4)$
$N(x) = -x^2 - 4$
$N(x) = 0 \Rightarrow -x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = -4$, pas de solution.

3) a) Montrer que $\boldsymbol{P(x) = 24x^2 - 28x + 8}$.

$P(x) = (4x-2)(6x-4)$
$P(x) = 24x^2 - 16x - 12x + 8$
$P(x) = 24x^2 - 28x + 8.$

b) Soit $R(x) = (m-2)x^2 - (m-2p)x + n + 3$.
Calculer m, n et p pour que $P(x)$ et $R(x)$ soient identiques.

Pour que $P(x)$ et $R(x)$ soient identiques, il faut avoir :

$m - 2 = 24$ $\quad ET \quad$ $m - 2p = 28$ $\quad ET \quad$ $n + 3 = 8$

$m = 26$ $\qquad$ $26 - 2p = 28$ $\qquad$ $n = 8 - 3$

$-2p = 2$ $\qquad$ $n = 5$

$p = -1$

Donc $P(x)$ et $R(x)$ sont identiques pour $m = 26, p = -1$ et $n = 5$.

4) On a $f(x) = \dfrac{P(x)}{T(x)}$.

a) Pour quelles valeurs de x, $f(x)$ est-elle définie ?

$f(x)$ est définie pour $T(x) \neq 0$

Or $T(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$ OU $x = -\frac{5}{4}$, déjà démontré

Donc $f(x)$ est définie pour $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{5}{4}$.

b) L'équation $f(x) = 3$, admet-elle une solution ? Justifier.

$f(x) = 3$

$$\frac{4\,(2x-1)(3x-2)}{(2x-1)(5+4x)} = 3$$

$$\frac{4(3x-2)}{5+4x} = 3$$

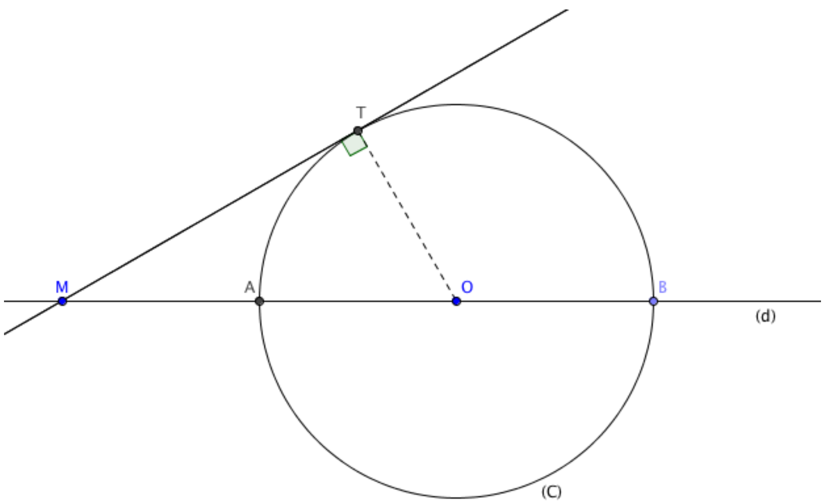
$12x - 8 = 15 + 12x$

$-23 = 0$ $\qquad$ Pas de solution.

Exercice 4

On donne un cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm. Une droite (d) passant par O coupe ce cercle en A et B.
Soit M le symétrique de O par rapport à A et (MT) une tangente menée de M à (C) (T étant le point de tangence).

La figure suivante, qui n'est pas en vraies grandeurs, n'est pas à reproduire sur la copie.



a. Montrer que $T\widehat{M}O = 30°$.
- Dans le triangle MOT rectangle en T, A milieu de $[\mathrm{OM}]$ (effet de la symétrie), donc (AT) médiane relative à l'hypoténuse $[\mathrm{OM}]$ et $\mathrm{AT} = \frac{\mathrm{OM}}{2} = \frac{6}{2} = 3$, soit 3 cm.

$\mathrm{TA} = \mathrm{AO} = \mathrm{OT} = 3$, donc TAO triangle équilatéral et $\mathrm{T\widehat{O}A} = 60°$.
Dans le triangle Mot rectangle en T, $\mathrm{T\widehat{M}O} = 90° - 60° = 30°$.

On mène par B la droite (d') tangente à (C) qui coupe (MT) en E.
b. Quelle est la nature du triangle TBE ? Justifier.
Comme (d') perpendiculaire à (d) donc à (OM) en B, alors (d') tangente à (C) en B.
(ET) et (EB) sont donc deux tangentes à (C) passant par E, en T et B respectivement.
Donc ET = EB.
De plus, EBM triangle rectangle en B (effet de la perpendiculaire), avec $\mathrm{E\widehat{B}M} = 30°$ (d .d),
donc $\mathrm{M\widehat{E}B} = \mathrm{M\widehat{E}T} = 60°$.
D'où MET triangle équilatéral, ayant deux cotés égaux et un angle de 60°.

La droite (OE) coupe le cercle (C) en I, avec $I \in [OE]$.
c. Montrer que (AT) // (OE). En déduire ME.
Le triangle ATB est inscrit dans le cercle (C) de diamètre l'un de ses cotés $[\mathrm{AB}]$.
ATB est donc un triangle rectangle en T, et (AT) perpendiculaire à (TB).
(ET) et (EB) sont deux tangentes à (C) passant par E, en T et B respectivement.
Donc (OE), soit (OI), perpendiculaire à (BT), étant médiatrice de $[\mathrm{BT}]$.
D'où (AT) parallèle à (OI) étant toutes deux perpendiculaires à (BT).

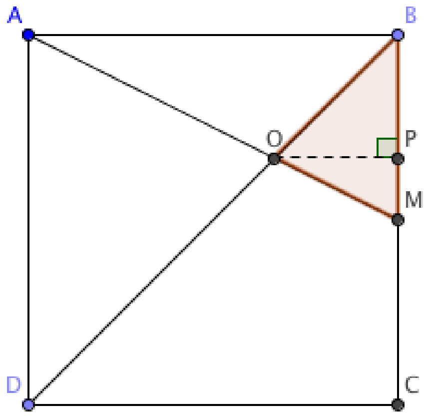
- Dans le triangle MOT rectangle en T ($\mathrm{M\widehat{O}T} = 90°$ effet de la tangente (OT) à (C) en T)
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$\mathrm{MT}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{OT}^2$
$\mathrm{MT}^2 = 36 - 9$
$\mathrm{MT}^2 = 27$
$\mathrm{MT} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, soit $3\sqrt{3}$ cm.

Dans le triangle MEO :
T ∈ (ME)
A ∈ (MO)
(TA) parallèle à (OE)
D'après le théorème de Thalès on aura :
$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MO}} = \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{ME}} = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OE}} = \frac{1}{2}$ car A milieu de $[\mathrm{MO}]$ (dd)
ME = 2 MT = $2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

d. Démontrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle TBE.
(EO) médiatrice de $[BT]$
(AT) parallèle à (OI) et $AT = OI$ donc $ATIO$ parallélogramme
Alors (AB) parallèle à (TI) avec $(AB) \perp (EB)$
Donc $(TI) \perp (EB)$ et (TI) hauteur en mm temps médiatrice dans le triangle ETB équilatéral.
I étant l'intersection de ces deux médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle ETB.

Exercice 5

$ABCD$ est un carré de coté $1\ cm$. Soit M le milieu de $[BC]$.
(AM) et (BD) se coupent en O.
Soit P le projeté orthogonal de O sur (BM).



a) Montrer que $\frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}$.

(BD) et (AM) sont deux sécantes en O, avec (BM) parallèle à (AD) (ABCD carré)
D'après le théorème de Thalès, on aura :

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BM}{AD} = \frac{MO}{OA}$$

avec $\frac{BM}{AD} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$ (AD = BC cotés opposés du carré ABCD et M milieu de $[BC]$ p.h)
donc $\frac{BO}{OD} = \frac{1}{2}$ et $\frac{BO}{BD} = \frac{BO}{BO+OD} = \frac{1}{3}$

b) Calculer l'aire du triangle OBM. En déduire l'aire du triangle AOD puis celle de AOB en justifiant.

Dans le triangle BDC :
- (OP) ⊥ (BC) (P projeté orthogonal de O sur (BM))
- (DC) ⊥ (BC) (ABCD carré)

donc (OP) // (DC)
avec O ∈ (BD)
et P ∈ (BC)
D'après le théorème de Thalès, on aura :

$$\frac{BO}{BD} = \frac{BP}{BC} = \frac{OP}{DC} = \frac{1}{3}$$

$$OP = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}\ cm$$

$$A_{OBM} = \frac{1}{2}\ OP \times BM = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}\ cm^2$$

AOD est un agrandissement du triangle OBM dans le rapport 2.
Donc $A_{AOD} = 2^2\ A_{OBM} = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\ cm^2$

$$A_{ABM} = \frac{1}{2}\ AB \times BM = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ cm^2$$

$$A_{AOB} = A_{ABM} - A_{OBM} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\ cm^2$$