Mathématiques **2016-2017**

Fiche Noël **Classe de 4^{e}**

I. Calcul Littéral

Exercice 1

A- Développer et réduire chacune des expressions suivantes

$$\begin{aligned} A &= 2(x-1)-(x-3) \\ &= 2x-2-x+3 \\ &= x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -(3x-2)+(5x+3) \\ &= -3x+2+5x+3 \\ &= 2x+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 4-2(x+1)(x+5) \\ &= 4-2(x^2+6x+5) \\ &= -2x^2-12x-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 5(2x-1)-(-x+6)(2x+1) \\ &= 10x-5-(-2x^2+11x+6) \\ &= 2x^2-x-11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 3(x-1)(3-2x)-5(x+4) \\ &= 3(-2x^2+5x-3)-5x-20 \\ &= -6x^2+10x-29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{3}(4x-9)+\frac{1}{5}(2x+1) \\ &= \frac{4}{3}x-3+\frac{2}{5}x+\frac{1}{5} \\ &= \frac{26}{15}x-\frac{14}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= -5\left(\frac{1}{15}-3x\right)-\left(\frac{2}{3}x-1\right) \\ &= -\frac{1}{3}+15x-\frac{2}{3}x+1 \\ &= \frac{43}{3}x+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{2}{3}(x-2)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right) \\ &= \frac{2}{3}x-\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+x \\ &= \frac{5}{3}x-\frac{17}{6} \end{aligned}$$

B- Factoriser chacune des expressions suivantes

$I = 45x^2 - 30xy + 60x$
$= 15x(3x - 2y + 4)$

$J = 81y^2 + 18y + 9$
$= 9(9y^2 + 2y + 1)$

$K = 25x^2y - 15xy + 30xy^2$
$= 5xy(5x - 3 + 6y)$

$L = 4x^3 + 4x - 16x^2$
$= 4x(x^2 + 1 - 4x)$

$M = -6xy + 24x^2y^2 - 30xy^2$
$= -6xy(1 - 4xy + 5y)$

$N = 49x^2 - 14xy + 7x$
$= 7x(7x - 2y + 1)$

Exercice 2

Sachant que x est un nombre entier non nul, exprimer en fonction de x :

a. l'opposé de $x = -x$
b. l'inverse de $x = \frac{1}{x}$
c. l'opposé du carré de $x = -x^2$
d. le nombre entier qui suit x *est* $(x + 1)$;
e. le carré de l'opposé de $x = (-x)^2$
f. l'opposé de l'inverse de $x = -\frac{1}{x}$
g. le carré de l'inverse de $x = (\frac{1}{x})^2$
h. le nombre entier qui précède x *est* $x - 1$

Exercice 3

a) Développer et réduire A ; B ; C

$A = 4(-2t + 3) - (3 - 8t)$
$= -8t + 12 - 3 + 8t$
$= 9$

$B = \frac{3}{4}(12x - 8) - \frac{3}{2}(6x - 4) + 5x$
$= \frac{3}{4} \times 12x - \frac{3}{4} \times 8 - \frac{3}{2} \times 6x - \frac{3}{2} \times (-4) + 5x$
$= 9x - 6 - 9x + 6 + 5x$
$= 5x$

$C = 3x(4x - 3) - (-4x + 2)(5 - 4x)$
$= 12x^2 - 9x - (-20x + 16x^2 + 10 - 8x)$
$= 12x^2 - 9x + 20x - 16x^2 - 10 + 8x$
$= -4x^2 + 19x - 10$

b) Christophe affirme que l'expression A est indépendante de la valeur donnée à la variable. A-t-il raison ? Justifier.

Christophe a raison, quelle que soit la valeur de « x » l'expression A sera toujours égale à 9.

c) Calculer la valeur numérique de C pour $x = -2$.

$$\begin{aligned}C &= 3x(4x-3)-(-4x+2)(5-4x)\\ &= 3\times(-2)\times\left(4\times(-2)-3\right)-\left(-4\times(-2)+2\right)\left(5-4\times(-2)\right)\\ &= -6\times(-11)-10\times 13\\ &= 66-130\\ &= -64\end{aligned}$$

c) <u>Puissances</u>

<u>Exercice1</u>

Ecrire sous la forme a^n, où $n \neq 1$:

$$\begin{aligned}A &= 2^3\times 2^{-8}\times 4\\ &= 2^{-5}\times 2^2\\ &= 2^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= 5^{-4}\times\left(5^2\right)^{-3}\times 25^2\\ &= 5^{-4}\times 5^{-6}\times 5^4\\ &= 5^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G &= \frac{7^5\times 7^{-3}}{49^4}\\ &= \frac{7^2}{7^8}\\ &= 7^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= 2^{16}-2^{15}\\ &= 2^{15}\times 2-2^{15}\\ &= 2^{15}\times(2-1)\\ &= 2^{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= 6^3\times 2^{-2}\times 4^2\times 3^2\\ &= 3^3\times 2^3\times 2^{-2}\times 2^4\times 3^2\\ &= 3^5\times 2^5\\ &= 6^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H &= 100^3\times 25\times 2^2\\ &= 10^6\times 5^2\times 2^2\\ &= 10^6\times 10^2\\ &= 10^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 2^{2016}\times\frac{1}{6^3}\times 3^{2016}\\ &= \left(2\times 3\right)^{2016}\times\frac{1}{6^3}\\ &= 6^{2016}\times\frac{1}{6^3}\\ &= 6^{2013}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \frac{27\times 6^{-4}\times 9^2}{4^{-2}\times 3^5}\\ &= \frac{3^3\times\left(2\times 3\right)^{-4}\times 3^4}{2^{-4}\times 3^5}\\ &= \frac{3^7\times 2^{-4}\times 3^{-4}}{2^{-4}\times 3^5}\\ &= 3^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \frac{8^2\times 16^{-3}\times 6^{-2}}{9^{-1}\times 4}\\ &= \frac{2^6\times 2^{-12}\times 2^{-2}\times 3^{-2}}{3^{-2}\times 2^2}\\ &= 2^{-10}\end{aligned}$$

Exercice 2

a. Donner l'écriture décimale de A, B et C

$A = 5^2 + 2^{-1}(4 - 6 \times 3) + (-18 - 11 \times 2)^0$

$= 25 + \frac{1}{2} \times (4 - 18) + (-40)^0$

$= 25 + 0{,}5 \times (-14) + 1$

$= 25 - 7 + 1$

$= 19$

$B = \frac{1}{3^{-1}} \times (9 - 6 \times 2^{-1}) - 10^1 + 125^0 \times (2^1 - 2^{-1})$

$= 3 \times \left(9 - 6 \times \frac{1}{2}\right) - 10 + 1 \times (2 - \frac{1}{2})$
$= 3 \times (9 - 3) - 10 + 1 \times 1{,}5$
$= 3 \times 6 - 10 + 1{,}5$
$= 18 - 10 + 1{,}5$
$= 9{,}5$

$C = 0{,}25 \times 10^{-3} \times 40 \times (10^2)^3 \times 18$

$= 18 \times 0{,}25 \times 40 \times 10^{-3} \times (10^2)^3$
$= 18 \times 10 \times 10^{-3} \times 10^6$
$= 18 \times 10^3$
$= 18\,000$

b. Donner l'écriture scientifique de D, E et F.

$D = 21{,}5 \times 10^{16} + 4{,}25 \times 10^{17} - 2{,}3 \times 10^{15}$

$= 21{,}5 \times 10 \times 10^{15} + 4{,}25 \times 10^2 \times 10^{15} - 2{,}3 \times 10^{15}$

$= 10^{15} \times (21{,}5 \times 10 + 4{,}25 \times 10^2 - 2{,}3)$

$= 10^{15} \times (215 + 425 - 2{,}3)$

$= 10^{15} \times 637{,}7$

$= 10^{15} \times 6{,}377 \times 10^2$

$= 6{,}377 \times 10^{17}$

$E = 42 \times 10^{-13} - 0{,}21 \times 10^{-11} + 3{,}2 \times 10^{-12}$
$= 42 \times 10^{-11} \times 10^{-2} - 0{,}21 \times 10^{-11} + 3{,}2 \times 10^{-11} \times 10^{-1}$
$= 10^{-11} \times (42 \times 10^{-2} - 0{,}21 + 3{,}2 \times 10^{-1})$
$= 10^{-11} \times (0{,}42 - 0{,}21 + 0{,}32)$
$= 0{,}53 \times 10^{-11}$
$= 5{,}3 \times 10^{-12}$

$$F = \frac{21\times 10^{-3}\times 15\times \left(10^{2}\right)^{3}\times 4}{1{,}2\times 10^{-8}\times 3}$$

$$= \frac{21\times 15\times 4}{1{,}2\times 3}\times \frac{10^{-3}\times 10^{6}}{10^{-8}}$$

$$= \frac{3\times 7\times 3\times 5\times 4}{4\times 0{,}1\times 3\times 3}\times \frac{10^{3}}{10^{-8}}$$

$$= \frac{7\times 5}{0{,}1}\times 10^{3-(-8)}$$

$$= 350\times 10^{11}$$

$$= 3{,}50\times 10^{2}\times 10^{11}$$

$$= 3{,}5\times 10^{13}$$

c. Donner la fraction irréductible de G

$$G = \frac{0{,}9\times 10^{5}\times 6\times 10^{-9}\times 28}{\left(10^{-3}\right)^{3}\times 14\times 10^{6}}$$

$$= \frac{0{,}9\times 6\times 2\times 14}{14}\times \frac{10^{5}\times 10^{-9}}{10^{-9}\times 10^{6}}$$

$$= 10{,}8\times \frac{10^{-4}}{10^{-3}}$$

$$= 10{,}8\times 10^{-4-(-3)}$$

$$= 10{,}8\times 10^{-4+3}$$

$$= 10{,}8\times 10^{-1}$$

$$= 1{,}08$$

$$= \frac{108}{100}$$

$$= \frac{27}{25}$$

d) Problèmes

1. Le quart des passagers du train Marseille-Lille est en première classe, le reste en deuxième classe.

Arrivant à la gare de Lyon, les $\frac{3}{8}$ des passagers de la première classe et le sixième des passagers de la deuxième classe descendent du train.
Sachant qu'il reste 525 passagers dans ce train après l'arrêt à la gare de Lyon trouve le nombre total de passagers au départ de Marseille.

Fraction des passagers qui sont descendus du train:

$\frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$; $\frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$

$\frac{3}{32} + \frac{1}{8} = \frac{7}{32}$

Fraction représentant les passagers qui sont restés :

$1 - \frac{7}{32} = \frac{25}{32}$

Le nombre de passagers au départ

$525 \div \frac{25}{32} = 525 \times \frac{32}{25} = 672$

2. Un propriétaire d'un terrain a vendu le quart de sa propriété en 2015 et les $\frac{4}{5}$ du reste en 2016.

a. Quelle fraction du terrain lui reste-t-il?

Il a vendu : $\frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{17}{20}$ *de sa propriété*
Il lui reste : $1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$ *de sa propriété*

b. Quelle était la superficie de la propriété sachant que la partie restante est de 600 m^2 ?

$600 \div \frac{3}{20} = 600 \times \frac{20}{3} = 6000 \text{ m}^2$

3. Le 1er jour, Lilou a parcouru les $\frac{3}{7}$ de son voyage. Le lendemain, elle parcourt les $\frac{3}{4}$ du reste et enfin le 3ème jour elle arrive après avoir parcouru 40 km.
Quelle est la longueur de son voyage ?

Fraction parcourue les deux premiers jours : $\frac{3}{7} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$

Il reste donc $\frac{1}{7}$ du trajet soit 40 km

40 x 7 = 280 km

La longueur du trajet est de 280 km

e) <u>Géométrie</u>

<u>Exercice 1</u>

On donne un cercle $C(O; 4cm)$ et de diamètre $[MN]$.
La médiatrice de $[MN]$ coupe le cercle en deux points P et Q.

a. Quelle est la nature du triangle MPO ? Justifier.
b. Calculer la valeur de PN. En donner une valeur approchée au millimètre prés.

La parallèle à (PM) passant par O coupe $[PN]$ en R.
(MR) coupe (PO) en G.

c. Calculer PG.

a) [MN] diamètre du cercle C de centre O, donc O milieu de [MN]. La médiatrice de [MN] coupe C en P et Q alors (PQ) perpendiculaire à (MN) en O par suite $M\hat{O}P = 90^o$*, en plus OM = OP = 4cm (rayons de (C)) alors MOP triangle rectangle isocèle en O.*

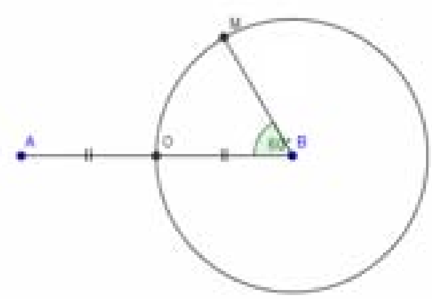
b) P appartient à la médiatrice de [MN] donc PN = PM, MOP triangle rectangle isocèle en O
d'après l'égalité de Pythagore :
$PM^2 = PO^2 + MO^2$
$PM^2 = 32\ cm^2$
$PM = \sqrt{32}$ *cm valeur exacte*
$PM \approx 5{,}7$ *cm valeur arrondie au mm.*

c) Dans le triangle MPN, O milieu de [MN], (OR) parallèle à (MP), R appartient à [PN]
donc R milieu de [PN].
Alors [PO] et [MR] sont 2 médianes qui se coupent en G, par suite G est le centre de gravité du triangle MPN.
Donc $PG = \frac{2}{3} PO = \frac{8}{3}$ *cm*

<u>Exercice 2</u>

On donne un cercle $C(B; 3cm)$.
O et M sont deux points de ce cercle tel que $M\hat{B}O = 60°$.
A est le symétrique de B par rapport à O.

a. Quelle est la nature du triangle MBO ? Justifier.
b. Calculer AM.



a) O et M sont 2 points du cercle (C) de centre B donc BN = BO (rayons de (C)) donc MBO triangle isocèle en B.
De plus $M\hat{B}O = 60^o$ *alors MBO équilatéral.*

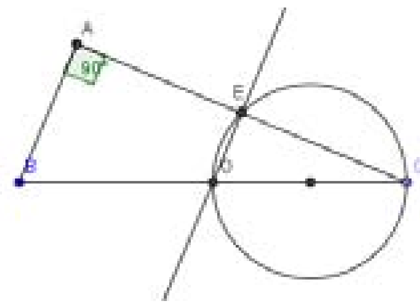
b) Dans le triangle MBA ; O milieu de [AB] car A et B sont symétriques par rapport au point O.
donc [MO] médiane relative à [AB] et OA = OB = AB/2. on a en plus MO=OB car MOB triangle équilatéral par suite MO= AB/2
donc MBA triangle rectangle en MD
D'après l'égalité de Pythagore :
$MA^2 = AB^2 - MB^2$

$MA^2 = 8^2 - 4^2$

$MA^2 = 48$

$MA = \sqrt{48}$ *cm valeur exacte*

Exercice 3



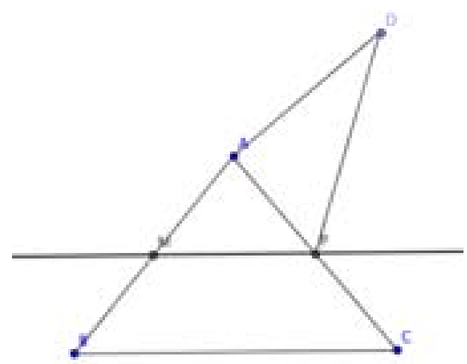
ABC est un triangle rectangle en A tel que :
BC = 15 cm et AB = 5 cm.
Soit O le milieu de $[BC]$.
Le cercle de diamètre [OC] coupe [BC] en E.

a. Quelle est la nature du triangle AOC ? Justifier.
b. Montrer que E est le milieu de [AC].

a) ABC triangle rectangle en A
[AO] médiane relative à [BC]
Or dans un triangle rectangle la médiane relative à l'hypoténuse a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse. Donc $AO = \dfrac{BC}{2} = OC$
D'où AOC isocèle en O.

b) OEC inscrit dans le cercle de diamètre [OC] donc OEC triangle rectangle en E.
Dans ABC :
(OE) et (BA) sont perpendiculaires à (AC) donc (OE) est parallèle à (AB)
O milieu de [BC] et E appartient à [AC] donc E milieu de [AC].

Exercice 4



Dans la figure ci-dessous, ADP est un triangle rectangle en A tel que :
AD = 8 cm et DP = 10 cm
ABC est un triangle isocèle en A et M est le milieu de $[AB]$.
La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en P.
a) Calculer AB.
b) Sachant que BC = 14 cm, calculez, en justifiant, la longueur AG, où G est le centre de gravité du triangle ABC.

a) Dans le triangle ABC, M milieu de [AB], (MP) parallèle à (BC) et P appartient à [AC]
Or si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au second alors elle coupe le troisième en son milieu.
Donc P milieu de [AC].
APD triangle rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore
$AP^2 + AD^2 = PD^2$
AP = 6 cm
Donc AC = 12cm et AB = AC = 12cm

b) Soit I milieu de [CB], [AI] médiane dans ABC isocèle en A donc [AI] hauteur.
En appliquant le théorème de Pythagore dans AIB rectangle en I on aura : $IB = \sqrt{95}$
G centre de gravité de ABC donc $AG = \dfrac{\sqrt{95}}{3}$